Математическая логика

Лекция №1

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.1 Алгебра высказываний

Содержание: Введение в курс «Математическая логика». Возникновение математической логики. Логические высказывания и связки. Анализ логических высказываний и логических задач. Логические операции и их свойства. Полнота системы операций.

Введение в курс «Математическая логика»

Целью освоения дисциплины «Математическая логика» является:

– формирование математической и логической культуры студента;

– привитие понимания универсального характера законов логики математических рассуждений, понимания роли и места математической логики в системе наук;

– развитие абстрактного мышления, общей математической и информационной культуры.

Дисциплина «Математическая логика» относится к вариативной части Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана. Она изучается после дисциплины «Программирование». Для ее освоения студенты также используют знания, умения, навыки, сформированные в ходе изучения основных математических курсов: «Математический анализ» «Алгебра», «Геометрия». Всего планируется проведение 10 лекций, 15 практических занятий, промежуточная аттестация — зачет.

Изучаемые темы и разделы:

№	Наименование разделов
1	**Алгебра высказываний и булева алгебра**
1.1	Алгебра высказываний
1.2	Булевы функции
2	**Логика предикатов и формальная логика высказываний**
2.1	Формализация логики и аксиоматика
2.2	Логика предикатов

Курс «Математическая логика» содержит лекционные и практические занятия.

На лекционные занятия выносятся общетеоретические темы. Рассматриваются базовая теоретические сведения о логике высказываний и логике предикатов, основах аксиоматической теории и некоторых приложениях математической логики (теории автоматов, булевых функций, теории доказательств и теории алгоритмов). Учитывая незначительное количество учебных часов, выделяемых на данный курс, базовые формулы математических методов и их обоснование дается в основном без строгих математических доказательств.

На практических занятиях (которые, как правило, построены по типу семинарских занятий) разбираются методы решения задач, связанных с различными темами данного курса.

Используемая литература

При изучении данного курса необходимо привлечение дополнительного материала и проработка лекционного материала с помощью следующей учебной литературы:

Учебная литература

1. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я.М. Ерусалимский. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-2908-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/106869.

2. Зюзьков, В.М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В.М. Зюзьков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 268 с. Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/107935.

3. Математическая логика и теория алгоритмов / сост. А.Н. Макоха, А.В. Шапошников, В.В. Бережной ; Министерство образования РФ и др. – Ставрополь : СКФУ, 2017. – 418 с. – Режим доступа: – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467015 – Текст : электронный.

4. Перемитина, Т.О. Математическая логика и теория алгоритмов / Т.О. Перемитина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2016. – 132 с. : ил. – Режим доступа: – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=480886 – Текст : электронный.

5. Бережной, В.В. Дискретная математика / В.В. Бережной, А.В. Шапошников ; Министерство образования и науки РФ, ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет». – Ставрополь : СКФУ, 2016. – 199 с. : ил. – Режим доступа: – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=466802 – Текст : электронный.

6. Зюзьков, В.М. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / В.М. Зюзьков ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). - Томск : Эль Контент, 2015. - 236 с. - ISBN 978-5-4332-0197-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=480935

Возникновение математической логики

Математическая логика тесно связана с логикой и обязана ей своим возникновением. Основы логики, науки о законах и формах человеческого мышления (отсюда одно из ее названий - формальная логика), были заложены величайшим древнегреческим философом Аристотелем (384—322 гг. до н. э.), который в своих трактатах обстоятельно исследовал терминологию логики, подробно разобрал теорию умозаключений и доказательств, описал ряд логических операций, сформулировал основные законы мышления, в том числе законы противоречия и исключения третьего. Вклад Аристотеля в логику весьма велик, недаром другое ее название - Аристотелева логика. Еще сам Аристотель заметил, что между созданной им наукой и математикой (тогда она именовалась арифметикой) много общего. Он пытался соединить две эти науки, а именно свести размышление, или, вернее, умозаключение, к вычислению на основании исходных положений. В одном из своих трактатов Аристотель вплотную приблизился к одному из разделов математической логики - теории доказательств.

В дальнейшем многие философы и математики развивали отдельные положения логики и иногда даже намечали контуры современного исчисления высказываний, но ближе всех к созданию математической логики подошел уже во второй половине XVII века выдающийся немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716), указавший пути для перевода логики «из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно» . Лейбниц надеялся даже, что в будущем философы, вместо того чтобы бесплодно спорить, станут брать бумагу и вычислять, кто из них прав . При этом в своих работах Лейбниц затрагивал и двоичную систему счисления.

Следует отметить, что идея использования двух символов для кодирования информации очень стара. Австралийские аборигены считали двойками, некоторые племена охотников-сборщиков Новой Гвинеи и Южной Америки тоже пользовались двоичной системой счета. В некоторых африканских племенах передают сообщения с помощью барабанов в виде комбинаций звонких и глухих ударов. Знакомый всем пример двухсимвольного кодирования - азбука Морзе, где буквы алфавита представлены определенными сочетаниями точек и тире.

После Лейбница исследования в этой области вели многие выдающиеся ученые, однако настоящий успех пришел здесь к английскому математику-самоучке Джорджу Булю (1815—1864), целеустремленность которого не знала границ. Материальное положение родителей Джорджа (отец которого был сапожным мастером) позволило ему окончить лишь начальную школу для бедняков. Спустя какое-то время Буль, сменив несколько профессий, открыл маленькую школу, где сам преподавал. Он много времени уделял самообразованию и вскоре увлекся идеями символической логики. В 1847 году Буль опубликовал статью «Математический анализ логики, или Опыт исчисления дедуктивных умозаключений», а в 1854 году появился главный его труд «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей».

Буль изобрел своеобразную алгебру - систему обозначений и правил, применимую ко всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Пользуясь этой системой, он мог закодировать высказывания (утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать) с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими, подобно тому, как в математике манипулируют числами. Основными операциями булевой алгебры являются конъюнкция (И), дизъюнкция (ИЛИ) и отрицание (НЕ).

Через некоторое время стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключательных схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

Отдельные положения работ Буля в той или иной мере затрагивались и до, и после него другими математиками и логиками. Однако сегодня в данной области именно труды Джорджа Буля причисляются к математической классике, а сам он по праву считается основателем математической логики и тем более важнейших ее разделов - алгебры логики (булевой алгебры) и алгебры высказываний.

Большой вклад в развитие логики внесли и русские ученые П.С. Порецкий (1846-1907), И.И. Жегалкин (1869-1947).

В XX веке огромную роль в развитии математической логики сыграл Д. Гильберт (1862-1943), предложивший программу формализации математики, связанную с разработкой оснований самой математики. Наконец, в последние десятилетия XX века бурное развитие математической логики было обусловлено развитием теории алгоритмов и алгоритмических языков, теории автоматов, теории графов (С.К. Клини, А. Черч, А.А Марков, П.С. Новиков и многие другие).

Логические высказывания и связки. Анализ логических высказываний и логических задач

Логическими *высказываниями* являются утвердительные предложения, о которых можно судить, истинны они или ложны. Причем они не могут быть истинными и ложными одновременно.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Логика высказываний рассматривает эти предложения не с точки зрения их смысла, содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности. Для понятия «высказывание» иногда ис-пользуют термин «пропозиция», а говоря «пропозициональный», подразумевают относящийся к логике высказываний. Классический пример утверждения, не являющегося высказыванием, таков:

Все, что написано почеркнутым шрифтом - ложь

Действительно, попытка определить истинностное значение этого «высказывания» приводит к противоречию: если то, что написано, истинно, то это противоречит смыслу слов в рамке. То же противоречие возникает, если предположить, что оно ложно. Вопросительные, повелительные и бессмысленные предложения не являются логическими высказываниями. Говорят, что если предложение истинно, то его значение истинности равно

И(1), если ложно — то Л(0). По аналогии с элементарной алгеброй, где любое число является константой, высказывание является логической константой, величина которой равна Л(0) или И(1).

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания **"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками.**

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными.** Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными.**

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Пропозициональные переменные – переменные, областью определения которых являются высказывания. Будем использовать соглашение — большие буквы обозначают пропозициональные переменные, а маленькие буквы высказывания и обычные переменные.

Логические операции и их свойства. Полнота системы операций

Каждая логическая связка соответствует операции над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

Основные операции:

Операция, выражаемая словом *"не",* называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком $\neg$)

Основное свойство: отрицание инвертирует логическое значение.

Операция, выражаемая связкой *"и",* называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой **"·"** (может также обозначаться знаками $\wedge$ или **&**)

Основное свойство: Высказывание **A B** истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания **A** и **B** истинны.

Операция, выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **v** ($\vee$ или плюсом).

Основное свойство: Высказывание **A v B** ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Операция, выражаемая связками *"если ..., то", "из ... следует", "... влечет ...",* называется **импликацией** (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$. **Основное свойство**: Высказывание **A→B** ложно тогда и только тогда, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "*... равносильно ...*", называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или **~.**

Основное свойство: Высказывание A↔B истинно тогда и только тогда, когда **A = B.**

Есть ли другие операции? Да есть. Всего возможны 4 унарных операции (действуют на 1 высказывание) и 16 бинарных операции (связывают 2 высказывания).

Таблицы истинности логических операций

О. **Таблица истинности логической операции выражает соответствие между всевозможными наборами значений высказываний и значениями операции.**

Используем удобный вариант обозначения 1=И, 0=Л.

Таблица истинности логической операции отрицание (**НЕ**)

x	не x
Л	**И**
И	**Л**

Таблица истинности логической операции конъюнкция (**И)**

x	**y**	**$x \wedge y$**
Л	**Л**	**Л**
Л	**И**	**Л**
И	**Л**	**Л**
И	**И**	**И**

Таблица истинности логической операции дизъюнкция (**ИЛИ)**

x	**y**	**x v y**
Л	**Л**	**Л**
Л	**И**	**И**
И	**Л**	**И**
И	**И**	**И**

Таблица истинности логической операции импликация **(Если..тогда)**

A	**B**	**$A \rightarrow B$**
Л	**Л**	**И**
Л	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**
И	**И**	**И**

Таблица истинности логической операции эквиваленции **(Тогда и только когда)**

A	**B**	**A↔B**
Л	**Л**	**И**
Л	**И**	**Л**
И	**Л**	**Л**
И	**И**	**И**

Полнота логических операций. Из таблиц истинности следует, что различных операций конечное число (4 для унарных и 16 для бинарных).

Высказывание	**Операция**			
X	*F0*	*F1*	*F2*	*F3*
Л	Л	Л	И	И
И	Л	И	Л	И

Высказывания		Операции							
A	*B*	*F0*	*F1*	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*	*F7*
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И
И	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
A	B	*F8*	*F9*	*F10*	*F11*	*F12*	*F13*	*F14*	*F15*
Л	Л	И	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И
И	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И

Операция	**Название**
F0	константа Л
F1	конъюнкция, логическое умножение
F2	отрицание импликации

F3	переменная *X1*
F4	отрицание обратной импликации
F5	переменная *X2*
F6	строгая дизъюнкция, исключающее или XOR
F7	дизъюнкция, логическое сложение
F8	стрелка Пирса, символ Лукашевича, функция Даггера, функция Вебба, отрицание дизъюнкции
F9	эквивалентность, равнозначность
F10	Отрицание инверсии
F11	импликация от
F12	отрицание, инверсия
F13	импликация *А и В*
F14	штрих Шеффера, отрицание конъюнкции
F15	константа И

Приоритет логических операций. Логические операции имеют приоритет исполнения в следующем порядке отрицание, логическое сложение и умножение, импликация, равносильность.

Математическая логика

Лекция №2-3

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.1 Алгебра высказываний

Содержание: Логические формулы и таблицы истинности. Равносильные преобразования формул. Тавтологии и противоречия. Законы логики. Доказательство равносильности формул и законов логики.

Логические формулы и таблицы истинности

С помощью логических (пропозициональных) переменных, символов логических операций и скобок любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой. Таким образом, значение любой формулы тоже высказывание. Поэтому любую формулу можно пере обозначать некой пропозициональной переменной.

О. К **элементарным формулам** логики высказываний (ЛВ) относят пропозициональную переменную и формулы полученные из одной или 2-х переменных с помощью одной унарной или бинарной логической операции.

О. **Составные формулы** ЛВ образуются из нескольких элементарных путем объединения их с помощью логических операций и скобок.

Если в составной формуле элементарные формулы заменить пропозициональными переменными (ПП) или наоборот ПП заменить на другую формулу, то это принято называть **преобразованием формулы**. Среди возможных преобразований выделяют **эквивалентные**.

О. **Эквивалентными преобразованиями** формул называют те, при которых логические значения формул не изменяются.

Классификация формул. Варианты формул ЛВ (логики высказываний) : тавтологии (всегда истинные), выполнимые (есть истинные значения), опровержимые (есть ложные значения), тождественно ложные (всегда ложные).

Таблицы истинности логических формул

Согласно определению, **таблица истинности (ТИ) логической формулы выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы (по аналогии с ТИ логической операции).**

Построение таблицы истинности логической формулы.

Построение ТИ требует выполнения нескольких этапов :

1) Определить последовательность/очередность выполнения операций в формуле.

2) Определить размер таблицы, т. е. число строк и столбцов. Число строк определяется числом различных наборов значений переменных. Таких наборов значений переменных для формулы, которая содержит 1 переменную — 2 набора, 2 переменных — 4 набора, ..., для n переменных 2^n. Число столбцов определяется числом операций+число переменных. Кроме того, для заголовков строк и столбцов выделяется еще 1 строка и 1 столбец.

3) Строится пустая таблица необходимого размера.

4) Заполняются строка и столбец заголовков, затем столбцы логических значений переменных. Здесь необходимо придерживаться общего правила заполнения, чтобы можно было легко сопоставлять ТИ разных формул. Кратко это правило можно выразить так — сначала выбирается Ложь (Л), затем Истина (И). При этом последняя переменная меняется быстрее всего Л-И-Л-И. Переменная перед ней в 2 раза медленнее Л-Л-И-И. Если есть переменная перед ними, то изменения значений Л-Л-Л-Л-И-И-И-И и т. д.

5) Последовательно заполняются столбцы для каждой операции отдельно. Заполнение ведется на основании основных свойств данной операции. При этом операции записываются в порядке очередности их выполнения. Часто операции для удобства нумеруют. Последний столбец ТИ и есть искомый результат.

Пример:

Условие: Построить таблицу истинности формулы логики высказываний

$\neg((C \wedge A) \vee \neg(A \vee B)) \wedge (\neg(A \wedge B) \to C) \leftrightarrow ((C \wedge A) \vee (A \vee B)) \wedge (\neg A \vee (\neg B \to A) \wedge (A \to \neg C))$

Решение:

1. Запишем снова формулу логики высказываний и расставим над ней нумерацию — порядок выполнения операций. По приоритету операций первыми выполняются действия в скобках, затем отрицание, далее дизъюнкция и конъюнкция, далее импликация и последней эквиваленция.

5 1 4 3 2 9 7 6 8 21 10 12 11 20 13 18 14 15 19 17 16

$\neg\ ((C \ \wedge\ A)\ \vee\ \neg\ (A\ \vee\ B))\ \wedge\ (\neg\ (A \wedge B)\ \to\ C)\ \leftrightarrow\ ((C \wedge A)\ \vee\ (A \vee B))\ \wedge\ (\neg A\ \vee\ (\neg B\ \to A)\ \wedge\ (A \to\ \neg C))$

2.Определим количество столбцов таблицы. Всего переменных 3. Всего операций 21. Тогда всего столбцов 3+21=24.

3.Определим количество строк таблицы. Всего переменных 3. Значит число вариантов $2^3=8$. Еще нужны 2 строки для нумерации операций и указания самих операций. Итого 8+2=10.

4.Построим пустую таблицу из 10 строк и 24 столбцов (можно в 2 ряда).

5.Заполним верхнюю строчку, пропустив 3 столбца для переменных расставив цифры от 1 до 21. Во второй строке запишем имена переменных, а далее операции. Операции должны связывать результаты уже выполненных операций или столбцы переменных, поэтому выполненные операции обозначаем просто их номером. Так как операции 10 и 1, 11 и 2 совпадают, то их можно обозначить просто одним номером. Не будет ошибкой и сокращение числа операций и таблицы на 2 столбца. Иначе эти 2 столбца просто переписываются.

6.Заполним первые 3 столбца. Для этого начиная с 3-й строки вносим логические значения Л и И по следующему правилу. Строки первого столбца делятся на 2 равные части (по 4 строки). В первой части пишем Л во второй части И. Строки второго столбца делятся на 4 равные части (по 2 строки). В первой части пишем Л, во второй части И, в третей части пишем Л, в четвертой части И (то есть чередуются через 2). Строки 3 столбца чередуем Л и И через строчку.

7.Заполняем 4 столбец. Это конъюнкция. Ее свойство — конъюнкция равна И только при И∧И. Поэтому ищем когда С=А=И и пишем в этих строках И. Все остальные строки равны Л. Заполняем 5 столбец. Это дизъюнкция. Ее свойство — дизъюнкция равна Л только при Л v Л. Поэтому ищем когда В=А=Л и пишем в этих строках Л. Все остальные строки равны И. Заполняем 6 столбец. Это отрицание 2 операции. Ее свойство — отрицание инвертирует, т. е. Л превращается в И и наоборот. Поэтому нужно инвертировать столбец операции 2. Далее заполняем столбцы по аналогии, учитывая какие из столбцов участвуют в данной операции. При заполнении столбца операции 8, нужно учесть свойство импликации. Импликация равна Л только для варианта И → Л. При заполнении столбца операции 21, нужно учесть свойство эквиваленции. Эквиваленция равна 1 только если значения связанных величин одинаковы (оба равны Л или оба равны И).

Таблица истинности

			1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	C ∧ A	A v B	˥(2)	1 v 2	˥(4)	A ∧ B	˥(6)	7 → C	5 ∧ 8
Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л
И	И	И	И	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л

Продолжение таблицы истинности

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

1	2	1v2	⌉A	⌉B	14 →A	⌉C	A→16	13v15	18 ∧17	12 ∧ 19	9↔20
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	И	И	И	И	И	И	Л
Л	И	И	И	Л	И	Л	И	И	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И	Л
И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	И	Л
И	И	И	Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	И

8.После заполнения всех столбцов получаем результат, в котором не все нули и не все единицы. Это значит, что формула не тавтология и не противоречие. Она выполнима.

Равносильные преобразования формул

О. 2 формулы называются равносильными, если при любом варианте значений входящих в них пропозициональных переменных и высказываний их логические значения совпадают. Обозначается равносильность знаком ≡.

О. Преобразования формул называются равносильными, если результатом является формула равносильная исходной.

Существует целый ряд равносильных формул, которые активно используют для таких преобразований. Часто их называют законами логики.

Теорема о равносильностях логики высказываний

Справедливы следующие равносильности:

а) ⌉⌉P ≡ P	б) P → Q ≡ ⌉Q → ⌉P	в) P ↔ Q ≡ ⌉P ↔ ⌉Q
г) P → (Q → R) ≡ (P ∧ Q) → R	д) (P → R)∧(Q → R) ≡ (P ∨ Q) → R	е) P ∧ P ≡ P
ж) P ∨ P ≡ P	з) P ∧ Q ≡ Q ∧ P	и) P ∨ Q ≡ Q ∨ P
к) P ∧ (Q ∧ R) ≡ (P ∧ Q) ∧ R	л) P ∨ (Q ∨ R) ≡ (P ∨ Q) ∨ R	м) P∧(Q∨R) ≡ (P∧Q) ∨ (P∧ R)
н) P ∨ (Q∧R) ≡ (P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)	о) P∧(Q ∨ P) ≡ P	п) P ∨ (Q ∧ P) ≡ P
р) ⌉(B∧A) ≡ ⌉A ∨ ⌉B (1-й закон де Моргана)	с) ⌉(B∨A) ≡ ⌉A∧⌉B (2-й закон де Моргана)	т) P ↔ Q ≡ Q ↔ P
у) P → Q ≡ ⌉P ∨ Q	ф) P → Q ≡ ⌉(P ∧ ⌉Q)	х) P ∧ Q ≡ ⌉(P → ⌉Q)
ц) P ∨ Q ≡ ⌉P → Q	ч) P ↔ Q ≡ (P → Q) ∧ (Q → P)	ш) P ∧ ⌉P ≡ Л P ∨ ⌉P ≡ И
ы) P ∧ И ≡ P P ∨ И ≡ И P ∧ Л ≡ Л P ∨ Л ≡ P		

Данные равносильности связаны с законами философской и математической логики: Законы поглощения: е, ж, о, п, ш-ы. Закон двойного отрицания а.

Перестановочные законы б, в, з, и, т. Сочетательные законы д, к, л, м, н.

Законы выражающие одни операции через другие: г, д, у, ф, х, ц, ч.

Доказательство теоремы: методом от противного, используя основные свойства логических операций.

Следствие 1. Из формул ф) и ч) следует, что импликацию и эквиваленцию всегда можно заменить дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием. Следовательно для любой формулы ЛВ существует равносильная ей совершенная формула.

Следствие 1. Из формул р) и с) следует, что любую совершенную формулу можно превратить в чистую, оставив только 2 операции из трех.

Из следствий выводится доказательство теоремы о полноте операций ЛВ.

Тавтологии и противоречия. Законы логики

Тавтологии известны в философии и логике очень давно. Фактически это логические конструкции, которые всегда истинны и поэтому не требуют доказательства. Особую актуальность для логики при этом имеют формулы, которые являются тавтологическими. Так как в эти формулы можно подставить в качестве значения ПП любое высказывание и формула останется истиной. Это очень удобно для доказательства истинности сложного высказывания. Достаточно показать, что это высказывание сводится к тавтологической формуле и истинность установлена. Поэтому тавтологии образуют множество законов логики.

Закон логики можно представить в одном из двух видов:

1) Виде эквивалентного преобразования $F1 \equiv F2$ (знак $\equiv$ - равносильность, т. е. для всех вариантов значений ПП формулы равны).

2) В виде тавтологии $F1 \leftrightarrow F2$. Существует теорема, доказывающая эквивалентность этих двух подходов.

Примеры законов логики в 1-й форме даны выше в теореме о равносильностях.

Примеры законов логики во 2-й форме можно представить доказав, что определенные формулы являются тавтологиями.

Теоремы о тавтологиях

Теорема 3.1. *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:*

а) закон исключенного третьего $P \vee \neg P$;

б) закон отрицания противоречия $\neg(P \wedge \neg P)$;

в) закон двойного отрицания $\neg\neg P \leftrightarrow P$;

г) закон тождества $P \to P$;

д) закон контрапозиции $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$;

е) закон силлогизма (правило цепного заключения)

$$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R);$$

ж) закон противоположности $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$;

з) правило добавления антецедента («истина из чего угодно»)

$$P \to (Q \to P);$$

и) правило «из ложного что угодно» $\neg P \to (P \to Q)$;

Теорема 3.2 (свойства конъюнкции и дизъюнкции). *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями*:

а) законы идемпотентности $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, $(P \vee P) \leftrightarrow P$;

б) законы упрощения $(P \wedge Q) \to P$, $P \to (P \vee Q)$;

в) законы коммутативности

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P),\ (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P);$$

г) законы ассоциативности

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R), (P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R);$$

д) законы дистрибутивности

$$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)),$$
$$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R));$$

е) законы поглощения

$$(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P,\ (P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P;$$

ж) законы де Моргана

$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q),\ \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

Доказательство. Докажем для примера, что первый закон

Свойства тавтологий

Существуют правила (свойства) с помощью которых можно получать из одних тавтологий другие.

Теорема 3.5 (правило заключения). *Если формулы F и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула H также тавтология. Другими словами, из $\vDash F$ и $\vDash F \to H$ следует $\vDash H$.*

Это «модус-поненс»

Теорема 3.6 (правило подстановки). *Если формула F, содержащая пропозициональную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии. Другими словами, из $\vDash F$ следует $\vDash S_X^H F$.*

это правило подстановки

Эти правила позволяют рассматривать любую тавтологию как шаблон для образования целого семейства тавтологий.

Доказательство равносильности формул и законов логики

Доказательство равносильности формул — одна из основных задач математической логики. Для проведения такого доказательства есть несколько вариантов:

- Построить ТИ формул и при совпадении последних столбцов — равносильность доказана.
- Свести равносильность формул к одной из стандартных равносильностей путем равносильного преобразования левой и правой части.
- Доказать равносильность методом ои противного и анализом результата с помощью основных свойств логических операций.

Пример построения ТИ

5 1 4 3 2 9 7 6 8 21 10 12 11 20 13 18 14 15 19 17 16

$\neg ((C \wedge A) \vee \neg (A \vee B)) \wedge (\neg (A \wedge B) \to C) \leftrightarrow ((C \wedge A) \vee (A \vee B)) \wedge (\neg A \vee (\neg B \to A) \wedge (A \to \neg C))$

Таблица истинности

			1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	C ∧ A	A v B	˥(2)	1 v 2	˥(4)	A ∧ B	˥(6)	7 → C	5 ∧ 8
Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л
И	И	И	И	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л

Продолжение таблицы истинности

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	2	1v2	˥A	˥B	14 →A	˥C	A→16	13v15	18 ∧17	12 ∧ 19	9↔20
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И

Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	И	И	И	И	И	И	Л
Л	И	И	И	Л	И	Л	И	И	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И	Л
И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	И	Л
И	И	И	Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	И

Математическая логика

Лекция №4-5

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.1 Алгебра высказываний

Содержание: Логическое следствие формул. Выводимость и доказательство теорем. Виды логических формул. Совершенные и нормальные формы, двойственность формул.

Логическое следствие формул

Пусть $A_1, A_2, A_3 \dots A_к$, B — формулы ЛВ.

О. Формула B является логическим следствием (ЛС) последовательности формул $A_1, A_2, A_3 \dots A_к$, если для любой совокупности одновременно истинных значений формул последовательности формула B тоже всегда истинна. Записывается это как

$$\mathbf{A_1, A_2, A_3 \dots A_к \models B}$$

Говорят, что последовательности формул $\boldsymbol{A_i}$ логически влекут (ЛВ) B или B является логическим следствием $\boldsymbol{A_i}$. Фактически истинность всех формул $\boldsymbol{A_i}$ влечет за собой истинность B, что очень удобно для посылок и заключения теорем.

О. Теорема формируется как логическое следствие заключения из посылок.

Доказать ЛС можно с помощью таблиц истинности (ТИ).

Пример: $A \to B,\ A \to \neg B \models \neg A$

Тавтология ЛС любой формулы, а противоречие ЛВ любую формулу.

Связь между равносильностью и логическим следствием

Связь между ЛС и равносильностью определяется теоремами:

Т1. $A \leftrightarrow B$ тогда и только тогда когда $A \models B$ и $B \models A$

Т2. $A \models B$ тогда и только тогда, когда $A \models A \to B$

Т3. $A_1, A_2, A_3 \dots A_к \models B$ тогда и только тогда, когда

$A_1, A_2, A_3 \dots A_к \models (A_1 \land A_2 \land A_3 \land \dots \land A_к) \to B$

Т4. $A_1, A_2, A_3 \dots A_к, B \models C$ тогда и только тогда, когда

$A_1, A_2, A_3 \dots A_к, B \models (B \to C)$

Т5. $A, B \models C$ тогда и только тогда, когда $A, B \models A \to (B \to C)$

Выводимость и доказательство теорем

Построение доказательства и правила вывода

На основании приведенного выше можно сформулировать принцип доказательства теоремы как получение логического следствия. Поскольку это справедливо для множества разных вариантов посылок, то говорят о правиле вывода — доказательства (ПВ).

О. ПВ — совокупность формул связанных ЛС. Посылки логически влекут заключение записывается это как дробь, где числитель посылки, а знаменатель заключение.

О. Совокупность формул называется противоречивой, если в любом варианте хотя бы одна формула ложна.

Если последовательность формул A_1, A_2, A_3 … $A_к$, противоречива, то их произведение — противоречие.

Теорема о противоречии. Если из совокупности формул ЛС противоречие, то она противоречива.

На основе противоречий формулируется метод косвенного доказательства теорем (доказательства от противного).

Методы доказательств. Доказательство от противного.

Теорема о методе доказательства от противного. Если из формул $\mathbf{A_1, A_2, A_3} \dots \mathbf{A_к}$, $\rceil\mathbf{B}$ логически следует противоречие, то $\mathbf{A_1, A_2, A_3 \dots A_к \models B}$.

Теорема. Являются справедливыми следующие схемы доказательств (ПВ)

$\dfrac{\begin{matrix}A\to B\\ A\end{matrix}}{B}$ — правило отделения;

$\dfrac{\begin{matrix}A\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}$ — правило введения конъюнкции;

$\dfrac{A\wedge B}{A}$; $\dfrac{A\wedge B}{B}$ — правила удаления конъюнкции;

$\dfrac{A}{A\vee B}$; $\dfrac{B}{A\vee B}$ — правила введения дизъюнкции;

$\dfrac{\begin{matrix}A\vee B\\ \neg B\end{matrix}}{A}$ — правило удаления дизъюнкции;

$\dfrac{A}{\neg\neg A}$ — правило введения двойного отрицания;

$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ — правило удаления двойного отрицания;

$\dfrac{\begin{matrix}A\to B\\ B\to A\end{matrix}}{A\leftrightarrow B}$ — правило введения эквиваленции;

$\dfrac{A\leftrightarrow B}{A\to B}$; $\dfrac{A\leftrightarrow B}{B\to A}$ — правила удаления эквиваленции;

$\dfrac{A\to B}{\neg B\to\neg A}$ — правило контрапозиции;

$\dfrac{\begin{matrix}\neg A\to B\\ \neg A\to\neg B\end{matrix}}{A}$ — правило доказательства от противного;

$\dfrac{\begin{matrix}A\to B\\ B\to C\end{matrix}}{A\to C}$ — правило силлогизма;

$\dfrac{\begin{matrix}A\to C\\ B\to C\end{matrix}}{A\vee B\to C}$ — доказательство разбором случаев.

Метод разбора случаев, основан на доказательстве C исходя из посылок $A\vee B$, $\mathbf{A\to B}$, $\mathbf{B\to C}$.

Виды логических формул. Совершенные и нормальные формы, двойственность формул

О. Формула ЛВ называется представленной в нормальной форме, если она выражается исключительно через простые ПП (переменные), связанные только операциями отрицания, сложения и умножения.

Любая формула ЛВ представима в нормальной форме, что доказывается равносильными преобразованиями операций импликации и эквиваленции через 3 базовых операции — отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

О. Нормальная формула ЛВ называется представленной в форме чистых конъюнкций (ЧК) если она содержит только 2 операции — отрицания и конъюнкции.

О. Нормальная формула ЛВ называется представленной в форме чистых дизъюнкций (ЧД) если она содержит только 2 операции — отрицания и дизъюнкции.

О. Формула ЛВ называется представленной в Дизъюнктивной Нормальной Форме (ДНФ) если является дизъюнкцией чистых конъюнкций (ЧК).

О. Формула ЛВ называется представленной в Конъюнктивной Нормальной Форме (КНФ) если является конъюнкцией чистых дизъюнкций (ЧК).

КНФ -— конъюнкция дизъюнкций,

О. Совершенная форма — нормальная форма, в которой использование отрицания разрешается только для применительно к пропозициональным переменным, но не разрешается для применения к формулам в скобках.

Примеры:

$$(\rceil P \vee (\rceil Q \vee R)) \wedge (\rceil P \vee Q) \wedge \rceil R \text{ — совершенная форма}$$

$$(\rceil P \vee \rceil (Q \vee R)) \wedge (\rceil P \vee Q) \wedge \rceil R \text{ — не совершенная форма}$$

С помощью законов Де Моргана любую не совершенную формулу можно преобразовать в совершенную. Докажем это на примерах:

1) Если формула содержит выражение вида $\rceil(B \wedge A)$, где A и B любые формулы, то по закону Де Моргану ее можно выразить как $\rceil(B \wedge A) \equiv \rceil A \vee \rceil B$ раскрыв тем самым скобки.

2) Если формула содержит выражение вида $\rceil(B \vee A)$, где A и B любые формулы, то по закону Де Моргану ее можно выразить как $\rceil(B \vee A) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$ раскрыв тем самым скобки.

Других вариантов использования отрицания перед скобками в нормальных формах не существует, поэтому последовательное использование примеров 1) и 2) позволит убрать отрицание перед скобками в любой форме. Полученная формула будет совершенной.

О. Совершенной Нормальной Дизъюнктивной Формой (СНДФ) называют ДНФ в совершенном виде.

О. Совершенной Нормальной Конъюнктивной Формой (СНКФ) называют КНФ в совершенном виде.

Теорема о совершенных нормальных формах

Для любой нормальной формы формулы ЛВ существует равносильные ей СНДФ и СНКФ.

Док-во: представим нормальную форму формулы ЛВ в совершенном виде по правилам 1) и 2). В результате получим выражение вида :

$F \equiv P_1 \text{ O } P_2 \text{ O } \ldots \text{O } P_k$, где O — операция $\vee$ или $\wedge$, а величины P_k будут содержать либо переменные, либо их отрицания.

Для того чтобы преобразовать F в СНДФ нужно выразить ее в виде дизъюнкций чистых конъюнкций (ЧК). Анализируем последовательность операций O. Найдем первую дизъюнкцию в F. Все что было до нее обозначим F_1. Тогда получим $F \equiv F_1 \vee P_m \text{ O } \ldots \text{O } P_k$ при этом F_1 – чистая конъюнкция. Если следующая операция после P_m тоже дизъюнкция, то и P_m – чистая конъюнкция. Рассмотрим теперь вариант когда следующая операция после P_m конъюнкция. В этом случае рассмотрим часть формулы $(F_1 \vee P_m) \wedge P_{m+1} \equiv (F_1 \wedge P_{m+1}) \vee (P_m \wedge P_{m+1})$ в соответствии с равносильной формулой м) $(P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$. Таким образом теперь вновь получим дизъюнкцию элементарных конъюнкций. Если эту последовательность действий повторять, то пройдя всю последовательность операций мы получим СНДФ.

По аналогии из F можно получить и СНКФ если использовать формулу н)

$(P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.

Так как использованный алгоритм работает для любой нормальной функции, то мы можем сделать вывод, что любая нормальная формула имеет равносильные варианты СНДФ и СНКФ ч.т.д.

Двойственность формул ЛВ

О. 2 нормальные формулы называются двойственными, если одна получается из другой заменой дизъюнкции на конъюнкцию и наоборот.

Двойственность отражает симметричность операций конъюнкции и дизъюнкции относительно их свойств. Все свойства СНДФ и СНКФ, законы Де Моргана, законы поглощения, сочетательные законы имеют одинаковые парные формулы относительно этих операций. Это имеет более глубокий математический смысл, который отражает теорема двойственности.

Теорема двойственности. Если 2 совершенные формулы равносильны, то и двойственные им формулы так же будут равносильными (без доказательства).

Законы Де-Моргана являются иллюстрацией этой теоремы.

Доказательство этой теоремы очень сложно и не будет рассматриваться в нашем курсе.

Математическая логика

Лекция №6-7

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.2 Булевы функции

Содержание: Булевы переменные, операции и функции. Булева алгебра. Связь булевых функций и формул логики. Полнота системы булевых функций. Представляющие функции.

Булевы переменные и функции

Английский математик Джордж Буль (1815—1864) в 1854 году опубликовал труд «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». В ней Буль предложил особую алгебру — систему обозначений и правил, применимую ко всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Пользуясь этой системой, он мог закодировать высказывания (утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать) с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими, подобно тому, как в математике манипулируют числами. Основными операциями булевой алгебры являются булевое умножение, булево сложение и инверсия. По аналогии с обычной алгеброй нужен переход к обычным числам. Буль предложил рассматривать базовое множество чисел своей алгебры состоящим всего из двух чисел {0;1}.

Сравнение с обычной алгеброй так же позволяет определить и функции в булевой алгебре. Булева функция определена на множестве {0;1} и результат ее тоже элемент этого же множества.

Фактически булева функция — частный случай дискретных функций, когда аргумент и значение числа принимают значения только из конечного множества. Эти функции очень интересны для инженеров, так как описывают поведение цифровой техники и дискретных автоматов. По аналогии с ЭВМ дискретные автоматы обычно сводят к двоичным системам, которые описываются булевыми функциями.

Количество возможных булевых функций ограничено. F(x) – 4, F(x,y) – 16 и т. д. К булевым функциям применимы операции булевого умножения (&), сложения (ϴ), инверсии-отрицания (черта сверху/снизу) которые дают результатом булевы функции. Алгебра, построенная на этих множествах и операциях называется Булевой алгеброй.

Свойства операций в булевой алгебре определяются выражениями:

1&X=X, 0&X=0, 1ϴX=1. 0ϴX=0, $\underline{1}$=0, $\underline{0}$=1.

О. **Булева алгебра** — алгебра определенная на множестве {0,1} и множестве булевых операций (2 бинарных и 1 унарная). В булевой алгебре задаются так же переместительные, сочетательные законы для этих операций, законы подобные формулам де Моргана. Их выражения аналогичны соответствующим равносильностям алгебры высказываний. Таким образом прослеживается однозначная связь между формулам логики высказываний и формулами булевой алгебры.

Полнота системы булевых функций

Теорема о множестве булевых функций

Число различных булевых функций от k аргументов $F(x_1,x_2,...x_k)$ – 2^T, где $T=2^k$.

Доказательство:

1) Число строк в таблице булевых функций $T=2^k$, где k — число переменных. Это следует из аналогии таблицы истинности и таблицы булевой функции.
2) Число различных булевых функций от n аргументов определяется как $N=2^T$. Это следует из того факта, что различные булевые функции отличаются набором значений в последнем столбце их таблиц. В этой таблице T строк, значит это T булевых значений (каждое значение имеет 2 варианта 0 или 1). С точки зрения комбинаторики число разных наборов из T таких значений равна $N=2^T$ ч.т.д.

Поскольку

Каждую БФ обозначают номером от 0 до 3 для БФ одной переменной, от 0 до 7 для БФ двух переменных, от 0 до 255 для 3 переменных.

Все БФ одинакового числа переменных образуют полную замкнутую систему.

Для БФ одной переменной:

X	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	1	0	1

1	0	0	1	1

Для БФ двух переменных:

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Эти таблицы полностью аналогичны таблицам истинности логических операций унарных и бинарных.

Можно построить такие же системы для булевых функций из 3, 4 и другого числа переменных.

Связь булевых функций и формул логики

Совершенно очевидно, что булево множество аналогично множеству логических значений логики высказываний. Поэтому формулам логики высказываний соответствуют булевы функции.

Проще всего записать булеву функцию с помощью таблицы, тогда она будет похожа на таблицу истинности. Это дает возможность сопоставлять булевы функции и формулы логики высказываний. Нужно только помнить :

а) Каждой формуле логики соответствует только одна булева функция.

б) Каждой булевой функции соответствует множество формул логики (например все тавтологии — одна булева функция).

Представляющие функции

Представляющие функции — обычные функции (которые используют обычные математические операции +, -, *) от булевых переменных, результаты расчета которых совпадают с результатами булевых операций. Обозначают эти функции большими русскими буквами О (отрицание), И (импликация), Д(дизъюнкция), К(конъюнкция), Э(эквиваленция).

Таким образом с помощью представляющих функций можно связать булевы переменные обычными математическими операциями так, чтобы результат был булевой переменной (аналог булевой функции).

Выведем выражения для представляюших функций на основе равносильностей логики высказываний:

О(а) = 1- а,

К(а,в) = а*в,

Д(а,в) = О(К(О(а),О(в))) = О((1-а)*(1-в)) = 1 - 1 + а + в - а*в = а + в - а*в.

Замечание. Нужно учитывать, что для булевых переменных всегда выполняется условие $а^n = а$.

И(а,в) = Д(О(а), в) = О(а) + в - О(а)*в = 1-а + в -(1-а)*в = 1-а + в -в+а*в = 1-а + а*в

Э(а,в) = К(И(а,в),И(в,а)) = (1-а + а*в)*(1-в + а*в) = 1-а + а*в -(в-а*в + а*в*в) + (а*в-а*а*в + а*а*в*в) = 1-а + а*в -в+а*в-а*в +а*в-а*в + а*в = 1-а-в+2*а*в

Это получено на основе формул $A\rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$ $\quad A \leftrightarrow B \equiv (A\rightarrow B) \wedge (B\rightarrow A)$

Лекция №7-8

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.2 Булевы функции

Содержание: Представление булевых функций в совершенной и нормальной формах. Связь булевых функций с двоичными автоматами.

Представление булевых функций в совершенной и нормальной формах

Любая булева функция представима в нормальной форме (форме выраженной через простые переменные, связанные операциями отрицания, сложения и умножения). ДНФ — булево сложение булевых произведений, КНФ -— булевое произведение булевых сумм. Таким образом, все булевы функции могут быть представлены через булевы операции только в нормальной форме. Напомним, что совершенная форма определялась для формул логики высказываний, для булевых функций можно определить совершенную форму аналогично как сумму произведений или произведение сумм с использованием инверсии, но без скобок (СНДФ или СНКФ). Можно построить и чистые формы (ЧКНФ и ЧДНФ). Практически, для булевых функций нормальные формы — единственный вариант представления через булевы операции. Из нормальной формы можно с помощью представляющих функций выразить булевы функции и через обычные математические операции сложения и умножения булевых переменных. Таким образом, нормальные формы играют важнейшую роль для булевых функций. Нам необходимо научиться представлять произвольную табличную булеву функцию в нормальной форме. Обратное преобразование выполняется элементарно просто по свойствам булевых операций. Напомню, что к булевым функциям применимы операции булевого умножения (обозначаем &), булевого сложения (обозначаем ϴ), инверсии-отрицания (черта сверху, но в лекциях снизу).

Основой метода построения нормальных форм булевых функций являются 2 леммы о разложении булевой функции по переменной:

Лемма 1. Для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ справедливы следующие формулы разложения по переменной x_1 :

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = (x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n))\ \Theta\ (\underline{x}_1 \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))$$

Лемма 2. Для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ справедливы следующие формулы разложения по переменной x_1 :

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = (x_1\ \Theta\ f(0, x_2,..., x_n))\ \&\ (\underline{x}_1\ \Theta\ f(1, x_2,..., x_n))$$

Доказательство: метод от противного, пусть существует такой набор $x_1, x_2,..., x_n$, что левая часть леммы не равна правой то есть :

$f(x_1, x_2,..., x_n) =0$ и $(x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n))\ \Theta\ (\underline{x}_1 \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))=1$ или

$f(x_1, x_2,..., x_n) =1$ и $(x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n))\ \Theta\ (\underline{x}_1 \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))=0$

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$ и $(x_1\ \Theta\ f(0, x_2,..., x_n))\ \&\ (\underline{x}_1\ \Theta\ f(1, x_2,..., x_n))=1$ или

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 1$ и $(x_1\ \Theta\ f(0, x_2,..., x_n))\ \&\ (\underline{x}_1\ \Theta\ f(1, x_2,..., x_n))=0$

учтем, что операция & фактически равна обычному умножению (представляющие функции) п разберем варианты :

Пусть $f(0, x_2,..., x_n)=0$, тогда при $f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$, $x_1 =0 \Rightarrow (x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n)) =0 \Rightarrow (\underline{x}_1\ \Theta\ f(1, x_2,..., x_n))=0 \Rightarrow (x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n))\ \Theta\ (\underline{x}_1 \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))=0<1$

получили противоречие.
Пусть $\boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)=1}$, тогда при ($\boldsymbol{x_1 \& f(1, x_2,..., x_n))}$ Ɵ ($\underline{x_1} \& \boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)}$)=0 =>
($\boldsymbol{x_1 \& f(1, x_2,..., x_n))}$ =0 и ($\underline{x_1} \& \boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)}$)=0 => $\underline{x_1}$ =0 => x_1 =1 =>
$\boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n))}$ =0, но $\boldsymbol{f(x_1, x_2,..., x_n)}$ = 1 получили противоречие.
Ч.Т.Д.
Аналогично доказывается и 2-я лемма.

Алгоритмы построения совершенных форм для булевых функций.

Алгоритм решения основан на формулах Леммы. Используя формулу разложения по переменным, можно построить алгоритм получения совершенной формы. Далее с помощью закона Де -Моргана можно получить и Совершенную нормальную форму.

Пример:

Условие: Для заданной булевой функции построить соответствующую ей совершенную форму, использующую только 3 операции — дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

В соответствии с вариантом задана функция F_{122}

Решение:

1. Построим таблицу булевой функция F_{122} и добавим к ней еще 4 столбца:

x	y	z	F_{122}				
0	0	0	0	K1	0	K11	0
0	0	1	1		1		1
0	1	0	1		1	K12	1
0	1	1	1		1		1
1	0	0	1	K2	1	K21	1
1	0	1	0		0		0
1	1	0	1		1	K22	1
1	1	1	0		0		0

Функция F связана с функциями K1 и K2 по лемме 2: F = (K1 Ɵ x) & (K2 Ɵ $\underline{x}$).
Аналогично K1 связана с функциями K11 и K12 : K1 = (K11 Ɵ y) & (K12 Ɵ $\underline{y}$).
Аналогично K2 связана с функциями K21 и K22 : K2 = (K21 Ɵ y) & (K22 Ɵ $\underline{y}$).
При этом функции K11, K12, K21, K22 зависят только от z. Сравнивая их с столбцом z можно определить их явное выражение. Для нашей функции это K11=z, K12=1, K21=$\underline{z}$, K22=$\underline{z}$.
Подставим эти значения в выражения для K1 и K2:
K1 = (K11 Ɵ y) & (K12 Ɵ $\underline{y}$) = (z Ɵ y) & (1 Ɵ $\underline{y}$) = (z Ɵ y) & 1 = (z Ɵ y)
K2 = (K21 Ɵ y) & (K22 Ɵ $\underline{y}$) = ($\underline{z}$ Ɵ y) & ($\underline{z}$ Ɵ $\underline{y}$)
здесь используются свойства булевых операций (1 Ɵ x) =1, (1 & x) =x,
(0 Ɵ x) =x, (0 & x) =0, законы Де Моргана ($\underline{z}$ Ɵ $\underline{y}$) =$\underline{(z \& y)}$, ($\underline{z}$ & $\underline{y}$) =$\underline{(z \Theta y)}$
Подставим эти значения в выражение для F:
F = (K1 Ɵ x) & (K2 Ɵ $\underline{x}$) = ((z Ɵ y) Ɵ x) & ((($\underline{z}$ Ɵ y) & ($\underline{z}$ Ɵ $\underline{y}$)) Ɵ $\underline{x}$)
Это выражение можно упростить, если использовать свойство

$(\underline{z} \Theta y) \& (\underline{z} \Theta \underline{y}) = \underline{z}$.
В результате $F = (z \Theta y \Theta x) \& (\underline{z} \Theta \underline{x})$

Ответ: совершенной формой для булевой функции F_{122} может быть
$F = (z \Theta y \Theta x) \& (\underline{z} \Theta \underline{x})$

Двоичные автоматы

Математическая логика с развитием ВТ оказалась в тесной взаимосвязи с методами конструирования и программирования вычислительной техники. Алгебра логики нашла широкое применение первоначально так же при разработке автоматов.

Логический элемент — это схема, реализующая логические операции дизъюнкции(дизъюнктор), конъюнкции (конъюнктор) и инверсии(инвертор).

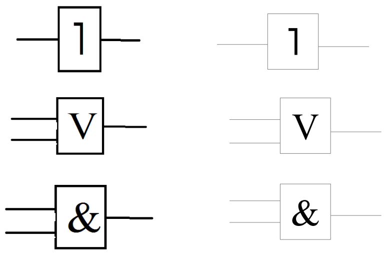
С помощью логических элементов создаются логические схемы для цифровой обработки данных. То есть вся цифровая автоматика основывается на логических элементах. Принято логические автоматы называть двоичными, так они являются частным случаем цифрового автомата, который обрабатывает числа (как правило натуральные или целые). Удобство создания и применения логических элементов обусловило тот факт, что на практике используют только двоичные автоматы, которые являются основными структурами ЭВМ, чипов и другой цифровой электроники.

Для построения логических схем используют обозначения:

инвертор (отрицание)

дизъюнктор (лог.сложение)

конъюнктор (лог.умножение)



Так как логическая схема фактически является электрической, то ее построение ведется по правилам построения чертежей в электронике (пересечение линий без соединения обозначается дугой окружности, пересечение линий с соединением обозначается маленьким черным кружком, входы и выходы обозначаются прозрачными кружками с буквенными обозначениями, так же обозначаются места соединений линий на разных листах, линии строятся как отрезки прямых, поворот линий только под прямым углом, входы и выходы инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов обозначаются только сбоку а не сверху или снизу).

Связь булевых функций с двоичными автоматами

Система булевых функций хорошо подходит для описания электрических переключательных схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера. Таким образом, ЭВМ может быть представлена как двоичный автомат, который реализуется логическими схемами. С другой стороны любую логику рассуждений или логику алгоритма можно представить как формулу логики высказываний. Но такая формула имеет прямую аналогию с логической схемой, где инвертор фактически реализует операцию отрицания, конъюнктор операцию конъюнкции, конъюнктор операцию конъюнкции.

В результате логические схемы автоматов могут моделировать не только булевы функции, но и формулы логики высказываний. Связанные с ними. Значит логические схемы образуют все действия внутри автомата, как арифметические, так и логические. Поэтому арифметическая и логические части ЭВМ не разделяются, а образуют единое АЛУ (арифметоки-логическое устройство).

Рассмотри алгоритм построения логической схемы для булевой функции на примере. Пример:

Условие: Построить схему автомата, реализующего заданную булеву функцию на выходе. В соответствии с вариантом задана функция F_{122}

Таким образом совершенной формой для булевой функции F_{122} может быть

$F = (z \Theta y \Theta x) \wedge (\underline{z} \Theta \underline{x})$.

Построим схему автомата по формуле совершенной формы, используя логические элементы (дизюнктор, конъюнктор и инвертор).

Последовательность построения:

а) Изобразим 3 входа автомата x,y,z в виде небольших кружков.

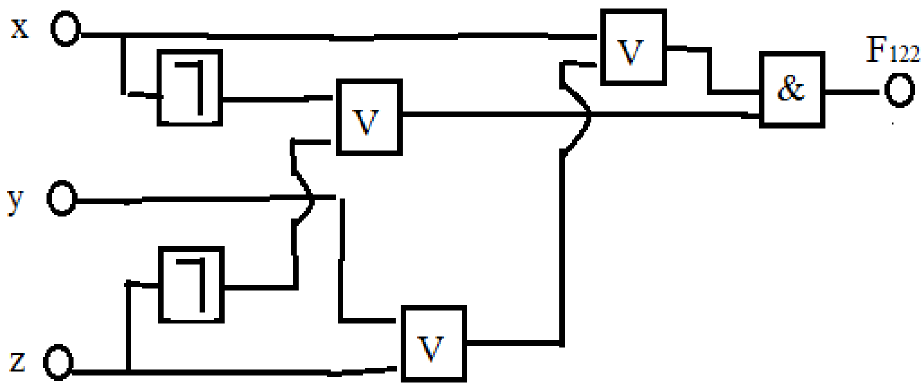
б) В соответствии с формулой нам необходимы еще отрицания x и z. Поэтому добавим 2 инвертора (˥) к этим входам.

в) Нам необходимы 3 дизъюнктора (V). Расположим их так, чтобы было удобно подавать на их входы соответствующие сигналы из входов x,y,z и выходов инверторов.

г) Последняя операция конъюнкция, поэтому добавим конъюнктор (&) ближе к выходу.

д) Свяжем все элементы автомата соединениями, так чтобы они соответствовали порядку выполнения операций.

Схема автомата



(Замечание: в схеме автомата при пересечении линий, которые электрически не соединены необходимо делать полукруг обвода, все остальные соединения поворачивать под прямым углом).

Математическая логика

Лекция №9

Раздел №1. Алгебра высказываний и булева алгебра

Тема 1.2 Булевы функции

Содержание: Представление булевых функций в совершенной и нормальной формах. Связь булевых функций с двоичными автоматами.

Представление булевых функций в совершенной и нормальной формах

Любая булева функция представима в нормальной форме (форме выраженной через простые переменные, связанные операциями отрицания, сложения и умножения). ДНФ — булево сложение булевых произведений, КНФ -— булевое произведение булевых сумм. Таким образом, все булевы функции могут быть представлены через булевы операции только в нормальной форме. Напомним, что совершенная форма определялась для формул логики высказываний, для булевых функций можно определить совершенную форму аналогично как сумму произведений или произведение сумм с использованием инверсии, но без скобок (СНДФ или СНКФ). Можно построить и чистые формы (ЧКНФ и ЧДНФ). Практически, для булевых функций нормальные формы — единственный вариант представления через булевы операции. Из нормальной формы можно с помощью представляющих функций выразить булевы функции и через обычные математические операции сложения и умножения булевых переменных. Таким образом, нормальные формы играют важнейшую роль для булевых функций. Нам необходимо научиться представлять произвольную табличную булеву функцию в нормальной форме. Обратное преобразование выполняется элементарно просто по свойствам булевых операций. Напомню, что к булевым функциям применимы операции булевого умножения (обозначаем &), булевого сложения (обозначаем Ѳ), инверсии-отрицания (черта сверху, но в лекциях снизу).

Основой метода построения нормальных форм булевых функций являются 2 леммы о разложении булевой функции по переменной:

Лемма 1. Для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ справедливы следующие формулы разложения по переменной x_1 :

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = (x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n)) \,\Theta\, (\underline{x_1} \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))$$

Лемма 2. Для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ справедливы следующие формулы разложения по переменной x_1 :

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = (x_1 \,\Theta\, f(0, x_2,..., x_n)) \,\&\, (\underline{x_1} \,\Theta\, f(1, x_2,..., x_n))$$

Доказательство: метод от противного, пусть существует такой набор $x_1, x_2,..., x_n$, что левая часть леммы не равна правой то есть :

$f(x_1, x_2,..., x_n) =0$ и $(x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n)) \,\Theta\, (\underline{x_1} \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))=1$ или

$f(x_1, x_2,..., x_n) =1$ и $(x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n)) \,\Theta\, (\underline{x_1} \,\&\, f(0, x_2,..., x_n))=0$

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$ и $(x_1 \,\Theta\, f(0, x_2,..., x_n)) \,\&\, (\underline{x_1} \,\Theta\, f(1, x_2,..., x_n))=1$ или

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 1$ и $(x_1 \,\Theta\, f(0, x_2,..., x_n)) \,\&\, (\underline{x_1} \,\Theta\, f(1, x_2,..., x_n))=0$

учтем, что операция & фактически равна обычному умножению (представляющие функции) п разберем варианты :

Пусть $f(0, x_2,..., x_n)=0$, тогда при $f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$, $x_1 =0 \Rightarrow (x_1 \,\&\, f(1, x_2,..., x_n)) =0$

=> $(\underline{x}_1\ \Theta\ \boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n)})=0$ => $(x_1\ \&\ \boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n)})\ \Theta\ (\underline{x}_1\ \&\ \boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)})=0<1$
получили противоречие.
Пусть $\boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)=1}$, тогда при $(x_1\ \&\ \boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n)})\ \Theta\ (\underline{x}_1\ \&\ \boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)})=0$ =>
$(x_1\ \&\ \boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n)}) =0$ и $(\underline{x}_1\ \&\ \boldsymbol{f(0, x_2,..., x_n)})=0$ => $\underline{x}_1 =0$ => $x_1 =1$ =>
$\boldsymbol{f(1, x_2,..., x_n)} =0$, но $\boldsymbol{f(x_1, x_2,..., x_n)} = 1$ получили противоречие.
Ч.Т.Д.
Аналогично доказывается и 2-я лемма.

Алгоритмы построения совершенных форм для булевых функций.

Алгоритм решения основан на формулах Леммы. Используя формулу разложения по переменным, можно построить алгоритм получения совершенной формы. Далее с помощью закона Де -Моргана можно получить и Совершенную нормальную форму.

Пример:

Условие: Для заданной булевой функции построить соответствующую ей совершенную форму, использующую только 3 операции — дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.
В соответствии с вариантом задана функция F_{122}
Решение:
1. Построим таблицу булевой функция F_{122} и добавим к ней еще 4 столбца:

x	y	z	F_{122}				
0	0	0	0	К1	0	К11	0
0	0	1	1		1		1
0	1	0	1		1	К12	1
0	1	1	1		1		1
1	0	0	1	К2	1	К21	1
1	0	1	0		0		0
1	1	0	1		1	К22	1
1	1	1	0		0		0

Функция F связана с функциями К1 и К2 по лемме 2: $F = (K1\ \Theta\ x)\ \&\ (K2\ \Theta\ \underline{x})$.
Аналогично К1 связана с функциями К11 и К12 : $K1 = (K11\ \Theta\ y)\ \&\ (K12\ \Theta\ \underline{y})$.
Аналогично К2 связана с функциями К21 и К22 : $K2 = (K21\ \Theta\ y)\ \&\ (K22\ \Theta\ \underline{y})$.
При этом функции К11, К12, К21, К22 зависят только от z. Сравнивая их с столбцом z можно определить их явное выражение. Для нашей функции это $K11=z$, $K12=1$, $K21=\underline{z}$, $K22=\underline{z}$.
Подставим эти значения в выражения для К1 и К2:
$K1 = (K11\ \Theta\ y)\ \&\ (K12\ \Theta\ \underline{y}) = (z\ \Theta\ y)\ \&\ (1\ \Theta\ \underline{y}) = (z\ \Theta\ y)\ \&\ 1 = (z\ \Theta\ y)$
$K2 = (K21\ \Theta\ y)\ \&\ (K22\ \Theta\ \underline{y}) = (\underline{z}\ \Theta\ y)\ \&\ (\underline{z}\ \Theta\ \underline{y})$
здесь используются свойства булевых операций $(1\ \Theta\ x) =1$, $(1\ \&\ x) =x$,
$(0\ \Theta\ x) =x$, $(0\ \&\ x) =0$, законы Де Моргана $(\underline{z}\ \Theta\ \underline{y}) =\underline{(z\ \&\ y)}$, $(\underline{z}\ \&\ \underline{y}) =\underline{(z\ \Theta\ y)}$
Подставим эти значения в выражение для F:
$F = (K1\ \Theta\ x)\ \&\ (K2\ \Theta\ \underline{x}) = ((z\ \Theta\ y)\ \Theta\ x)\ \&\ (((\underline{z}\ \Theta\ y)\ \&\ (\underline{z}\ \Theta\ \underline{y}))\ \Theta\ \underline{x})$

Это выражение можно упростить, если использовать свойство
$(\underline{z} \Theta y) \& (\underline{z} \Theta \underline{y}) = \underline{z}$.
В результате $F = (z \Theta y \Theta x) \& (\underline{z} \Theta \underline{x})$

Ответ: совершенной формой для булевой функции F_{122} может быть
$F = (z \Theta y \Theta x) \& (\underline{z} \Theta \underline{x})$

Двоичные автоматы

Математическая логика с развитием ВТ оказалась в тесной взаимосвязи с методами конструирования и программирования вычислительной техники. Алгебра логики нашла широкое применение первоначально так же при разработке автоматов.

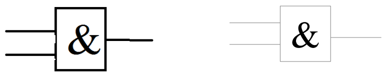
Логический элемент — это схема, реализующая логические операции дизъюнкции(дизъюнктор), конъюнкции (конъюнктор) и инверсии(инвертор).

С помощью логических элементов создаются логические схемы для цифровой обработки данных. То есть вся цифровая автоматика основывается на логических элементах. Принято логические автоматы называть двоичными, так они являются частным случаем цифрового автомата, который обрабатывает числа (как правило натуральные или целые). Удобство создания и применения логических элементов обусловило тот факт, что на практике используют только двоичные автоматы, которые являются основными структурами ЭВМ, чипов и другой цифровой электроники.

Для построения логических схем используют обозначения:

инвертор (отрицание)


дизъюнктор (лог.сложение)


конъюнктор (лог.умножение)


Так как логическая схема фактически является электрической, то ее построение ведется по правилам построения чертежей в электронике (пересечение линий без соединения обозначается дугой окружности, пересечение линий с соединением обозначается маленьким черным кружком, входы и выходы обозначаются прозрачными кружками с буквенными обозначениями, так же обозначаются места соединений линий на разных листах, линии строятся как отрезки прямых, поворот линий только под прямым углом, входы и выходы инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов обозначаются только сбоку а не сверху или снизу).

Связь булевых функций с двоичными автоматами

Система булевых функций хорошо подходит для описания электрических переключательных схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера. Таким образом, ЭВМ может быть представлена как двоичный автомат, который реализуется логическими схемами. С другой стороны любую логику рассуждений или логику алгоритма можно представить как формулу логики высказываний. Но такая формула имеет прямую аналогию с логической схемой, где инвертор фактически реализует операцию отрицания, конъюнктор операцию конъюнкции, конъюнктор операцию конъюнкции.

В результате логические схемы автоматов могут моделировать не только булевы функции, но и формулы логики высказываний. Связанные с ними. Значит логические схемы образуют все действия внутри автомата, как арифметические, так и логические. Поэтому арифметическая и логические части ЭВМ не разделяются, а образуют единое АЛУ (арифметоки-логическое устройство).

Рассмотри алгоритм построения логической схемы для булевой функции на примере. Пример:

Условие: Построить схему автомата, реализующего заданную булеву функцию на выходе. В соответствии с вариантом задана функция F_{122}

Таким образом совершенной формой для булевой функции F_{122} может быть

$F = (z \Theta y \Theta x) \wedge (\underline{z} \Theta \underline{x})$.

Построим схему автомата по формуле совершенной формы, используя логические элементы (дизюнктор, конъюнктор и инвертор).

Последовательность построения:

а) Изобразим 3 входа автомата x,y,z в виде небольших кружков.

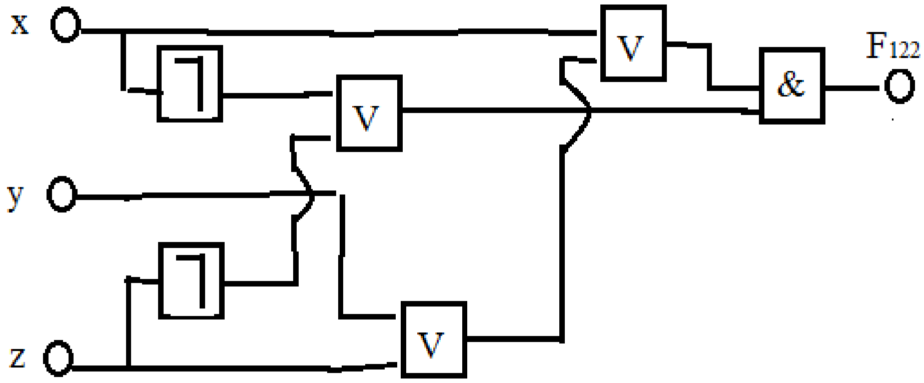
б) В соответствии с формулой нам необходимы еще отрицания x и z. Поэтому добавим 2 инвертора (⌉) к этим входам.

в) Нам необходимы 3 дизъюнктора (V). Расположим их так, чтобы было удобно подавать на их входы соответствующие сигналы из входов x,y,z и выходов инверторов.

г) Последняя операция конъюнкция, поэтому добавим конъюнктор (&) ближе к выходу.

д) Свяжем все элементы автомата соединениями, так чтобы они соответствовали порядку выполнения операций.

Схема автомата



(Замечание: в схеме автомата при пересечении линий, которые электрически не соединены необходимо делать полукруг обвода, все остальные соединения поворачивать под прямым углом).

Математическая логика

Лекция №10

Раздел №2. Логика предикатов и формальная логика высказываний

Тема 2.1 Формализация логики и аксиоматика

Содержание: Понятие о аксиоматическом методе построения теории. Полнота, противоречивость, разрешимость теории. Формализация логики высказываний.

Понятие о аксиоматическом методе построения теории

Основой построения формальной математической теории является аксиоматический метод.

О. Аксиомы — утверждения, принимаемые истинными без доказательства. Аксиомы являются основой для построения любой математической теории, которая строится из набора базовых аксиом и определений (подобных в нектором смысле аксиомам).

О. Правила вывода — набор логических правил или законов в данной теории, которые позволяют строить логически верные заключения, то есть получать в результате выражения, логические значение которых истина, при условии что посылки лежащие в основе правил вывода являются истиными. Поэтому любое правило вывода можно связать с логическим следованием заключения из посылок.

О. Теорема — утверждение в теории, которое является результатом вывода или доказательства с помощью правил вывода.

О. Доказательство — построение на основе правил вывода цепочки преобразований, которая связывает последовательным применением правил вывода к изначальному набору аксиом теории. Последовательность правил вывода принято называть цепочкой вывода.

О. Доказуемость утверждения — наличие цепочки вывода данного утверждения из набора посылок (аксиом или теорем данной теории). Доказуемыми в любой Аксиоматической теории (АТ) являются аксиомы и теоремы.

О. Аксиоматическая теория (АТ) — множество, объединяющее конечные наборы аксиом, правил вывода и цепочек вывода для теорем. Количество теорем не фиксировано и может последовательно увеличиваться путем построения новых цепочек вывода. Возможность построения АТ — одна из фундаментальных задач математики, которая отразилась в создании математической теории алгоритмов и метаматематики (термин предложенный Давидом Гильбертом).

Метаматематика должна была описывать возможность построения и свойства различных АТ. В дальнейшем из метаматематики выделились теория алгоритмов, математическая теория моделирования и некоторые другие теории.

Таким образом правило вывода (ПВ) — совокупность формул связанных Логическим Следованием (ЛС). Посылки логически влекут заключение записывается это как дробь, где числитель посылки, а знаменатель заключение.

Поскольку это справедливо для множества разных вариантов посылок, то говорят о наличии правила доказательства (ПД).

Свойства аксиоматических теорий. Полнота, замкнутость, непротиворечивость

Проблема разрешимости теорий. Полнота АТ. Замкнутость АТ. Непротиворечивость АТ. Гипотеза Геделя.

О. АТ разрешимая если:

существует алгоритм, позволяющий для любого утверждения, сформулированного в терминах теории, ответить на вопрос, будет или нет это утверждение теоремой данной теории.

Для построения АТ необходимо определить конечные системы аксиом и правил вывода.

Определение 17.1. Аксиома A из системы аксиом Σ называется *независящей от остальных аксиом* этой системы, если ее нельзя вывести (доказать) из множества $\Sigma\setminus\{A\}$ всех остальных аксиом системы Σ. Система аксиом Σ называется *независимой*, если каждая ее аксиома не зависит от остальных.

О.Разрешимость АТ - **существование в АТ доказательства/опровержения для любого утверждения, которое можно сформулировать в языке данной теории. Таким образом, любое утверждение либо доказуемо (теорема), либо опровержимо (то есть доказуемо обратное утверждение).**

О. Проблема разрешимости АТ :

существует алгоритм, позволяющий для любого утверждения, сформулированного в терминах теории, ответить на вопрос, будет или нет это утверждение теоремой данной теории.

О.Полнота АТ — существование в АТ доказательства/опровержения для любой формулы, сформулированной в АТ.

О.Противоречивость АТ - существование в АТ доказательства теоремы В и ˥В.

Гипотеза (Теорема) Геделя о противоречивости полных теорий утверждает что любая полная теория противоречива, а любая не противоречивая теория не полна. Эта теорема не имеет общего доказательства для любой АТ , а только частные примеры (например для исчисления высказываний),. Поэтому это утверждение остается гипотезой.

О. Исчисление — это особый вид АТ подобный теории чисел, где есть алфавит — набор цифр и правила построения чисел, которые должны удовлетворять строгим условиям, поэтому не любая последовательность цифр число и для каждого числа есть однозначная запись с помощью цифр. В исчислении так же задается формальный язык для записи выражений и правила определения принадлежности этих выражений данной АТ (правильность формального формулирования утверждений теории). Исчисление высказываний тоже имеет свой алфавит м правила построения логических формул. В тоже время в исчислении задаются и другие правила — правила вывода/доказательства и т. д.

Метаматематика Гильберта

Д.Гильберт предложил строить любые АТ единым образом на основе формальной математической логики. Таким образом, он предлагал разработать методы формального(автоматического) построения любой АТ в любой области точных наук на основе единых подходов. Он назвал это метаматематикой. Гильбертом была предложена первая система правил вывода для такой универсальной АТ. Альтернативно Генцен предложил свой вариант набора правил вывода для универсальной АТ.

О. Метаматематика — раздел математической логики, изучающий основания математики, структуру математических доказательств и математических теорий с помощью формальных методов. Термин «метаматематика» буквально означает «за пределами математики».

В широком смысле слова **метаматематика** — метатеория математики, не предполагающая никаких специальных ограничений на характер используемых мета-теоретических методов, на способ задания и объём исследуемой в ней «математики».

Метаматематика исследует следующие вопросы:

- непротиворечивости и полноты формализованных теорий;
- независимость аксиом;
- проблему разрешимости;
- вопросы определимости и погружения одних теорий в другие;
- дает точное определение понятия доказательства для различных формализованных теорий и доказывает теоремы о дедукции;
- изучает проблемы интерпретации формальных систем и их различные модели;
- устанавливает разнообразные отношения между формализованными теориями.

Как оказалось решить эти проблемы не так просто, в общем смысле решение большинства задач осталось на уровне гипотез. Чем более общей ставилась задача, тем сложнее ее доказать. В тоже время работы Геделя, Клини, Поста, Тьюринга, Черча и других математиков позволили доказать ряд теорем о непротиворечивости и полноте различных АТ (в том числе о исчислении высказываний, исчислении предикатов различных порядков). Было определена необходимость построения строгой теории моделирования (как математической задачи) и теории построения алгоритмов. Математическая теория алгоритмов поставила главной проблему существования конечного алгоритма решения задачи, очевидно что частным случаем этой проблемы является разрешимость и полнота АТ. Поэтому без развития методов теории алгоритмов (рекурсивные функции, виртуальные машины, формальные грамматики) решить проблемы метаматематики не возможно. Фактически теория алгоритмов и формальная теория моделирования развиваются до настоящего времени и вероятно основные достижения этих наук еще впереди.

Применение математической логики в школьной математике и информатике

Применение МЛ в информатике — таблицы истинности, автоматы, упрощение представления алгоритмов с помощью формул МЛ.
Применение МЛ в математике — представление доказательств и утверждений.
Примеры:
Записать с помощью кванторов следующие утверждения и их отрицания.
1) Функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b).
2) Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b).
3) Множество A является собственным подмножеством множества B .
4) Точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.
5) Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a,b]$ в точке x_0 .
6) Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .
7) Бинарное отношение ρ является симметричным.
8) Функция $f(x)$ ограничена на множестве R .
9) Булева функция $f(x_1, x_2,..., x_k)$ самодвойственна.
10) Множества A и B не пересекаются
Среди следующих предложений выделить предикаты, и для каждого предиката установить местность и область истинности, если $X = R$. Для двуместных предикатов изобразить область истинности графически.
1) $x + 2 = 0$.
2) При $x = 0$ выполняется равенство $x - 2 = 0$.
3) $x^3 - 8 = 0$.
4) $\exists x\left(x^3 - 8 = 0\right)$.

Пример 24.2. Запишем на языке логики предикатов определение простого числа: «Натуральное число x называется простым, если оно не равно 1 и при всяком разложении его в произведение двух натуральных чисел одно из них оказывается равным 1 или x»:

$$\neg(x = 1) \wedge (\forall u)(\forall v)(x = u \cdot v \rightarrow (u = 1) \vee (u = x)).$$

Отрицание этого утверждения — утверждение того, что число x составное, записывается следующим образом:

$$(x = 1) \vee (\exists u)(\exists v)(x = u \cdot v \wedge u \neq 1 \wedge u \neq x).$$

Пример 3. Сформулировать на примере теоремы Пифагора прямую, обратную теоремы, противоположную и противоположную обратной теоремы.

Математическая логика
Лекция №11

Раздел №2. Логика предикатов и формальная логика высказываний

Тема 2.2 Логика предикатов

Содержание: Понятие предиката. Логические области предикатов. Логические операции над предикатами. Примеры. Предикатные формулы.

Понятие предиката. Примеры

В текстах естественного языка часто встречаются повествовательные предложения, не являющиеся высказываниями так ка могут иметь неопределенные параметры. Например, такие предложения, как «У девочки красивая коса», «Число *x* — простое», «$x + y = 2$». Если в такие предложения вместо параметров (переменных) поставить конкретную девочку и конкретные числа *x. y, z,* то получим высказывания, которые станут истинными или ложными, например «У Веры красивая коса», «Число 17 простое» или «7 + 8 = 9» и т. п. Повествовательные предложения с параметрами принято называть предикатами.

Не всякие высказывания и не любые логические рассуждения могут быть описаны на языке логики высказываний. Иногда высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Кроме того, необходимо иметь возможность утверждать, что любые или какие-то объекты обладают определенными свойствами или находятся в некоторых отношениях. Поэтому следует расширить логику высказываний и построить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание и таких высказываний, которые можно отнести к предикатам. Такая логика называется логикой предикатов.

О. Предикат — логическое выражение, логическое значение которого зависит не только от логических операций и значений пропозициональных переменных, но и от значений обычных переменных.

Такие переменные принято называть свободными. По количеству свободных переменных предикаты принято делить на одноместные, двуместные и т. д. Предикат таким образом обладает свойством местности, которое определяется количеством свободных переменных.

Примеры: $P(x)=(x>5)$, $N(x,y)=(x<(y+5))$.

Логические области предикатов

Так как предикаты зависят от обычных переменных, то необходимо определить области значений этих переменных. Например x-целое, a-натуральное и т. д. Таким образом, для корректного описания предиката нужно не только указать его формулу, но и указать области значений для обычных переменных в предикате. При этом такие области (с точки зрения логики) можно разделить на 2 части — область ложности и область истинности. В одной области предикат принимает ложное значение, а в другой истинное значение.

Примеры: $P(x)=(x>5)$ и x-натуральное, $N(x,y)=(x<(y+5))$ и x,y — натуральные. Тогда ОИ (P(x)) = {6,7,8,9,10...} ОЛ (P(x)) = {1,2,3,4,5}

ОИ (N(x,y)) — множество пар натуральных чисел типа (1;1), (1;2), (1;3), ... где второе число больше разности первого минус 5,

ОЛ (N(x,y)) — множество пар натуральных чисел типа (6;1), (7;1), (8;1), ... где первое число больше второго на 5 и более.

Таким образом ОИ и ОЛ предиката — некое множество, объединяющие числа или кортежи чисел из возможных значений для свободных переменных.

Кортежем в алгебре называют совокупность или набор чисел (пары, тройки, четверки чисел и т. д.). В кортежах фиксирует число чисел, поэтому кортежи пар и троек чисел относятся к разным типам кортежей. Для кортежей так же определяют область значений для каждого числа в кортеже — его домен. Домены могут быть конечным множеством чисел, бесконечным счетным или не счетным множеством чисел.

О. Область ложности предиката — те значения свободных переменных, при которых предикат принимает логическое значение — ложь. Обозначим ОЛ.

О. Область истинности предиката — те значения свободных переменных, при которых предикат принимает логическое значение — истина. Обозначим ОИ.

Очевидно, что область ложности и область истинности предиката не пересекаются, а их объединение будет областью значений свободных переменных (область определения предиката).

О. Тождественно истинный (ТИ) предикат имеет в качестве области ложности пустое множество.

О. Тождественно ложный (ТЛ) предикат имеет в качестве области истинности пустое множество.

О. Выполнимый (ВП) предикат имеет непустые множества областей истинности и ложности.

Например предикат $P(x)=(x>x+5)$ где x-натуральное, является ТЛ предикатом.

Логические операции над предикатами. Примеры

По аналогии с логикой высказываний определим операции над предикатами — отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию.

О. **Отрицание** предиката P будем называть такой предикат, область ложности которого совпадает с областью истинности P, а и область истинности совпадает с областью ложности P.

О. **Конъюнкцией** предикатов P и T будем называть такой предикат, область ложности которого совпадает с объединением областей ложности P и T, а область истинности совпадает с пересечением областей истинности P и T.

О. **Дизъюнкцией** предикатов P и T будем называть такой предикат, область ложности которого совпадает с пересечением областей ложности P и T, а область истинности совпадает с объединением областей истинности P и T.

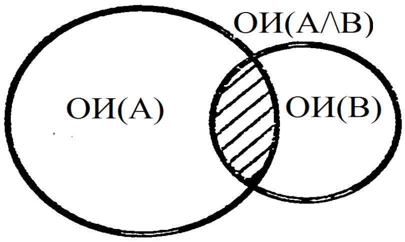
О. **Импликацией** предикатов P и T будем называть такой предикат, область ложности которого совпадает с пересечением областей истинности P и ложности T, а область истинности совпадает с объединением области ложности P и пересечением областей истинности P и T.

О. **Эквиваленцией** предикатов P и T будем называть такой предикат, область ложности которого совпадает с объединением пересечения областей ложности P и истинности T и пересечением областей истинности P и ложности T., а область истинности совпадает с объединением пересечения областей ложности P и T и пересечением областей истинности P и T.

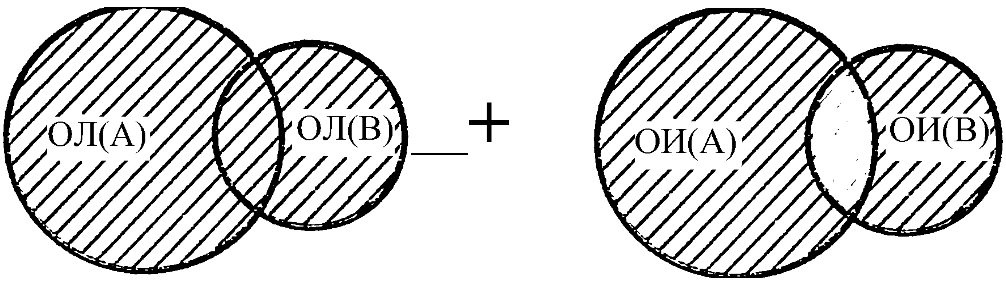
Примеры графических изображений операций :

ОИ и ОЛ конъюнкции предикатов A и B

ОИ является пересечением областей



Область ложности объединяется из 2 частей



Предикатные формулы

По аналогии с логикой высказываний можно определить понятие предикатной формулы, введя обозначения (аналогичные) для логических операций и скобки для разделения этих операций. Однако нужно учитывать, что помимо обычных операций в формулах предикатов так же используются специальные предикатные операции — кванторы. При этом можно сделать некоторые выводы:

- При фиксировании значений свободных переменных предикатные формулы не будут отличаться от формул логики высказываний. Поэтому можно считать логику высказываний частным случаем логики предикатов, а логические высказывания особыми (0-местными) предикатами.
- На предикатные формулы можно расширить понятие равносильности и логического следования. При этом, можно доказать что основные равносильности будут справедливы при замене пропозициональных переменных на предикаты.
- С другой стороны возможна ситуация, когда при одних значениях свободных переменных формулы будут равносильны, а при других — нет. Поэтому вводятся области равносильности.
- При фиксировании значений свободных переменных ТИ предикат будет тавтологией, поэтому тавтологии логики высказываний будут превращаться в ТИ предикаты при замене пропозициональных переменных на предикаты.
- Для предикатных формул можно определить совершенные формы (только отрицание, конъюнкция, дизъюнкция и кванторы). Определяются так же нормальная форма (конъюнкция, дизъюнкция и кванторы, отрицание только для элементарных формул) и предваренная НФ — кванторы последние операции в формулах.

Теорема (без доказательства) Любая предикатная формула имеет ПНФ.

Математическая логика

Лекция №12

Раздел №2. Логика предикатов и формальная логика высказываний

Тема 2.2 Логика предикатов

Содержание: Кванторы. Предикатные кванторные формулы. Связывание переменных. Законы логики предикатов. Равносильность предикатных формул. Общезначимость предикатных формул. Примеры.

Кванторы

Помимо обычных операций в логике предикатов введены 2 особые операции, которые принято называть кванторами. Особенность кванторов состоит в том, что они действуют не только на логические, но и на обычные переменные. Более того, каждый квантор должен быть связан с одной определенной свободной переменной, которая после этого становится связанной. Иногда говорят что квантор «вешают» на свободную переменную.

О. Квантор — логическая операция логики предикатов, которая заключается в связывание одной из обычных переменных особым условием, которое определяет логическое значение всего выражения.

О. Квантор общности ∀(для любого x) — квантор, который связывает переменную x условием любой x или для любого x. Это утверждение истинности логического значения, общего для всей области определения обычной переменной x (вне области определения, значение выражения не определено). Поэтому квантор назван квантором общности.

О. Квантор существования ∃(существует x) — квантор, который связывает переменную x условием существует такое x или есть такое значение x. Это утверждение существования такого значения обычной переменной x области ее определения(вне области определения, значение выражения не определено), что логическое значение операции будет истинным. Поэтому квантор назван квантором существования.

Примеры: $P(x)=\forall x(x>5)$ x-натуральное, $N(x,y)=\exists y\ \forall x\ (x<(y+5))$, x, y — натуральные. Тогда ОИ (P(x)) = {Ø} ОЛ (P(x)) = все значения, то есть предикат ТЛ. Для N наоборот предикат ТИ.

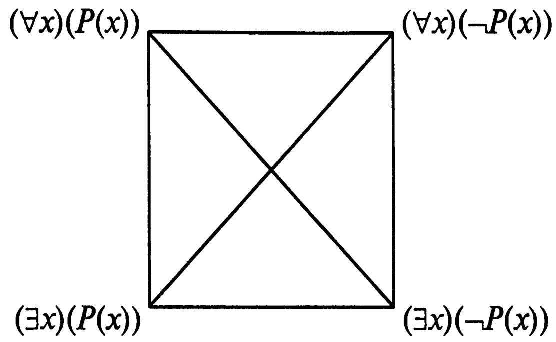
Замечание. Принято при записи квантора сразу после него писать ту переменную, которую он связывает. В этом случае данное описание переменной не входит в предикатную формулу и не влияет на ее значение, это просто комментарий к квантору.

Замечание. Принято считать кванторы более приоритетными операциями чем остальные и действующими на целую формулу, поэтому принято область действия квантора включать в круглые скобки. Если есть несколько кванторов, то кванторы общности и существования считаются равнозначными и их действие выполняется по очереди, сначала внутренний, потом внешний квантор. Например формулу $N(x,y)=\exists y\ \forall x\ (x<(y+5))$ необходимо озвучить так, существует y такой, что для любого x выражение $(x<(y+5))$ будет истиной.

Предикатные кванторные формулы

С помощью кванторов можно расширить множество различных предикатных формул, причем количество действующих кванторов ограничено только числом обычных переменных. Это значит что на одно и то же выражение может действовать несколько кванторов одновременно, но каждый на свою переменную. Запрещается навешивать 2 квантора на 1 переменную.

Кванторы и операция отрицания (по аналогии с нормальными формами и операциями конъюнкции и дизъюнкции) образуют определенную взаимосвязанную систему. Она может быть проиллюстрирована следующей схемой:



Самостоятельно определите логические значения формул квадрата для предиката P(x) — (x-четное натуральное число).

Введение кванторов расширяет спектр формул логики и помимо нормальных и совершенных форм появляется еще предваренная форма (ПФ).

О.Предваренная форма предиката — такая формула в которой кваторы вынесены за скобки общей формулы. То есть формула выглядит как
список предикатов и связанных ими переменных (формула без кванторов)

В этом случае действие кванторов отнесено к концу. Они являются конечными.

Теорема о ПФ. Любая формула логики предикатов имеет ПФ. (без док-ва)

О.Элементарной формулой логики предикатов являются формулы связывающие элементарные предикаты (без наличия внутри логических операций и кванторов) 1 логической операцией или только кваторами.

Связывание переменных

У любого предиката есть определенное количество обычных переменных. Это определяет свойство местности или арности предиката. Например при наличии 2 переменной, предикат принято называть одноместным или унарным, при 2 переменных предикат называют двуместным или бинарным и т. д. При этом принято при указании имени предиката обязательно указывать в скобках число и имена обычных переменных. Например P(x), T(a,в), K(a,в,c) и т. д.

Как мы уже говорили, без наличия кванторов обычные переменные являются свободными и определяют размерность области определения, а следовательно и ОИ и ОЛ предиката. Так при 1 переменной ОИ одномерна, при 2 переменных двумерна и т. д. Связывание квантором переменной приводит к изменению размерности таких областей на единицу. Как уже говорилось, если связать все переменные, то область станут точкой, то есть предикат превратится в логические высказывание с одним вариантом значения — истина или ложь. Поэтому анализ сложных формул логики предикатов требует первым делом анализа и отделения свободных и связанных переменных.

Законы логики предикатов

По аналогии с логикой высказываний можно определить понятие закона логики предикатов. Однако нужно учитывать, что помимо обычных операций в формулах предикатов так же используются специальные предикатные операции — кванторы. При этом можно на первом шаге сделать следующий вывод — все законы логики высказывание будут справедливы для предикатов, которые не имеют кванторов. Поэтому мы можем все известные нам ранее законы логики расширить на предикаты. При наличии кванторов эти формулы так же могут быть справедливыми, ведь кванторы просто связывают обычные переменные. Поэтому, если кванторы не действуют на формулы с логическими операциями, определенными в законе логики, то эти законы останутся действующими. Иначе говоря, если в законе логики заменить логическую переменную на предикат, то закон логики останется действующим. Другое дело, если мы работаем с предваренными формулами предикатов. Здесь нужны особые законы, учитывающие предкатные кванторы.

Поскольку законы логики можно формулировать либо как тавтологии (тоести ТИ предикаты), либо как равносильности, рассмотрим их на уровне равносильных преобразований предикатов.

Равносильность предикатных формул

О.Предикатные формулы считаются **равносильными** если их ОИ и ОЛ совпадают.

Все равносильные формулы, вытекающие из законов логики высказываний справедливы и для предикатов, если они получены заменой пропозициональных переменных на предикаты (причем одноименная переменная заменяется одним е тем же предикатом).

Сформулируем некоторые из равносильных форму с кванторами. Прежде всего это кванторные законы де Моргана:

$\urcorner(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\urcorner P(x))$ $\quad$ $\urcorner(\exists x P(x)) \equiv \forall x (\urcorner P(x))$

Если применить к этим формулам отрицание, то получим :

$\forall x P(x) \equiv \urcorner(\exists x(\urcorner P(x)))$ $\quad$ $\exists x P(x)) \equiv \urcorner(\forall x (\urcorner P(x)))$

Далее это равносильности следующие из ТИ формул:

$\forall x\ \forall p\ A(x,p) \leftrightarrow \forall p\ \forall x\ A(x,p) \Rightarrow \forall x\ \forall p\ A(x,p) \equiv \forall p\ \forall x\ A(x,p)$

$\exists x\ \exists p\ A(x,p) \leftrightarrow \exists p\ \exists x\ A(x,p) \Rightarrow \exists x\ \exists p\ A(x,p) \equiv \exists p\ \exists x\ A(x,p)$

Это означает, что кванторы можно свободно менять местами, если это однотипные кванторы.

Есть равносильности связывающие кванторы с дизъюнкцией и конъюнкцией :

$$\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x) \equiv \exists x\ (A(x) \vee B(x))$$

$$\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x) \equiv \forall x\ (A(x) \wedge B(x))$$

Здесь видно, что $\exists$ связано с дизъюнкцией, а $\forall$ связано с конъюнкцией.

$\forall x\ \forall p\ A(x,p) <-> \forall p\ \forall x\ A(x,p) \Rightarrow \forall x\ \forall p\ A(x,p) \equiv \forall p\ \forall x\ A(x,p)$

$\exists x\ \exists p\ A(x,p) <-> \exists p\ \exists x\ A(x,p) \Rightarrow \exists x\ \exists p\ A(x,p) \equiv \exists p\ \exists x\ A(x,p)$

Общезначимость предикатных формул. Примеры

О. Предикатная формула называется общезначимой, если она ТИ при любой замене любой элементарной формулы на любой предикат.

Очевидно, что всякий общезначимый предикат является ТИ, но обратное не верно. Можно найти примеры ТИ предикатов, которые не являются общезначимыми. Это усложняет проверку на общезначимость. Поясним это на примере.

Пример

Условие: Доказать (или опровергнуть) общезначимость формулы логики предикатов. При отсутствии общезначимости привести пример предикатов, при которых эта формула может быть ложна. Пусть задана формула логики предикатов $\forall x \ \forall y \forall z \ (P(x,y) \ \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$

Решение:

Для доказательства общезначимость формулы логики предикатов нужно доказать ее ТИ (тождественную истинность) при любых заменах предиката P на любую предикатную формулу. Попробуем доказать это методом от противного.

Сформулируем эту формулу на естественном языке «Для любых x,y,z формула $P(x,y) \ \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)$ является истинной. Это значит, что $P(x,y) \ \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)$ — ТИ.

Доказательство. Предположим, что данная формула ложна, тогда существуют такие x,y,z, что формула $P(x,y) \ \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)$ является ложной. По свойству импликации получим:

$P(x,y) \ \wedge P(y,z) =1$ и $P(x,z) =0$ для этого набора x,y,z. По свойству конъюнкции получим:

$P(x,y) =1$ и $P(y,z) =1$ для этого набора x,y,z. Тогда предикат P должен быть истинным для одних пар чисел и ложным для других. Такое возможно. Например предикат P (x*y=0). Для y=0 он истинен для разных пар чисел (x,y) и (y,z), но при этом $x*z \neq 0$.

Вывод: предикат не является общезначимым, так как минимум для одного примера предиката P (x*y=0) он является ложным.

В логике высказываний есть алгоритм построения таблиц истинности (ТИ) позволяющий за конечное число шагов проверить тождественную истинность, выполнимость или тождественную ложность формулы ЛВ. К сожалению в логике предикатов такого алгоритма, проверяющего общезначимость не существует, хотя для некоторых видов формул это возможно.